

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ИМ. Е.С. ВЕНТЦЕЛЬ
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД
Решения к отборочному этапу
9-10 классы

Задание 1.

Решить неравенство:

$$\sqrt[3]{27 - x^3} \sqrt{5x - 6 - x^2} \leq 0.$$

В ответе указать сумму целочисленных решений.

Решение:

$$1) 5x - 6 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 3.$$

$$2) \begin{cases} 5x - 6 - x^2 \geq 0; \\ 27 - x^3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

Ответ: 5

Задание 2.

Сколько решений имеет уравнение $|x^2 + a| = 1$ при разных значениях a ? В ответе указать наибольшее целое значение параметра a , при котором число решений будет наибольшим.

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + a = 1 \\ x^2 + a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - a \\ x^2 = -1 - a \end{cases}$$

$a > 1 \Rightarrow$ решений нет;

$a = 1 \Rightarrow x = 0;$

$|a| < 1 \Rightarrow$ два корня;

$a = -1 \Rightarrow$ три;

$a < -1 \Rightarrow$ четыре

Ответ: -4

Задание 3.

Вычислить $\sin 50^\circ (1 - 2 \cos 80^\circ)$.

Решение:

$$\sin 50 - 2 \sin 50 \sin 10 = \sin 50 - (\cos 40 - \cos 60) = \cos 60 = 0,5.$$

Ответ: 0,5

Задание 4.

Решить уравнение:

$$\sqrt{35 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x - 5.$$

Ответ: 10

Задание 5.

На графике функции $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1}$ найти все точки, абсциссы и

ординаты которых одновременно являются целыми числами.

В ответе указать сумму абсцисс этих точек.

Решение:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1} = \frac{x(x - 1) - (x - 1) + 3}{x - 1} = x - 1 + \frac{3}{x - 1};$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 4; \\ y = 4 \end{cases} \quad x - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x - 1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = -4 \end{cases} \quad x - 1 = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = -4 \end{cases}$$

Ответ: 4

Задание 6.

Из пункта *A* по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта *B*, расположенного ниже по течению относительно пункта *A*, отправляется катер. Встретив плот, катер сразу же разворачивается и идет вниз по течению. К моменту возвращения катера в пункт *B* плот проходит расстояние, равное $\frac{2}{5}$ пути от *A* до *B*. Найти отношение скоростей катера (в стоячей воде) и скорости течения реки.

Решение:

Пусть расстояние между пристанями равно 1, скорость плота x , а скорость катера в стоячей воде y .

Время до встречи равно $\frac{1}{x + (y - x)} = \frac{1}{y}$;

Путь, пройденный до встречи плотом равен $\frac{x}{y}$; катером $\frac{y - x}{y}$;

Время движения катера после разворота равно $\frac{y - x}{y(y + x)}$;

за это время плот проплыл расстояние $\frac{x(y - x)}{y(y + x)}$.

Получим уравнение $\frac{x}{y} + \frac{x(y - x)}{y(y + x)} = \frac{2}{5}$. Обозначим $\frac{x}{y} = a$.

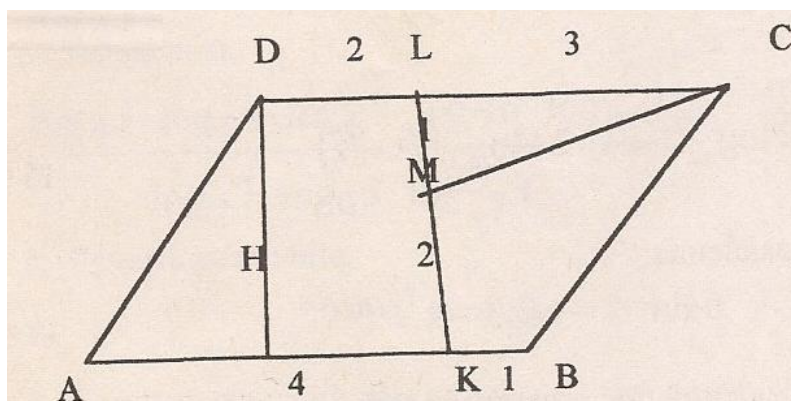
Получим $a + \frac{a(1 - a)}{1 + a} = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} = 4$.

Ответ: 4

Задание 7.

В параллелограмме $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 4:1$; точка L делит сторону CD в отношении $CL : LD = 3:2$. Точка M делит отрезок KL в отношении $KM : ML = 2:1$. Найти площадь четырехугольника $BCMK$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 20 дм^2 .

Решение:



Обозначим высоту, опущенную на AB , H , $AB = CD = a$ и высоту, опущенную из точки M на CD , h . Тогда $h = H/3$.

$$S_{BKLC} = \frac{\frac{3}{5}a + \frac{1}{5}a}{2} H = \frac{2}{5} aH = \frac{2}{5} 20 = 8.$$

$$S_{MCL} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3}{5} a = aH/10 = 2.$$

Следовательно, $S_{KBСМ} = 8 - 2 = 6$.

Ответ: 6